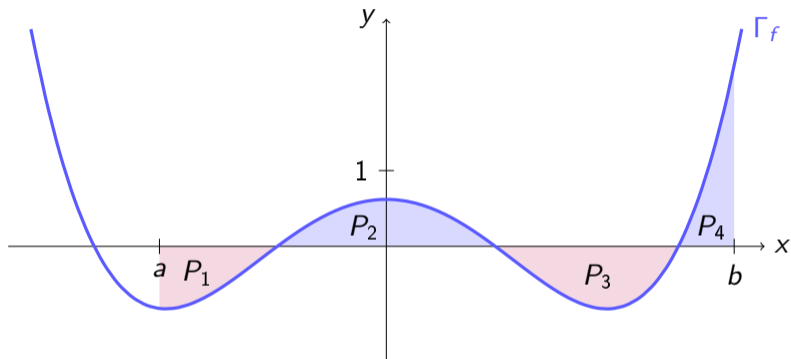




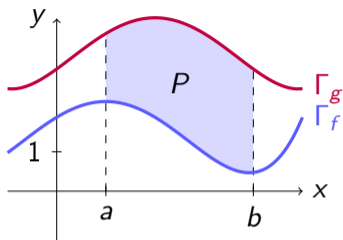
5.6. Računanje površine pomoću integrala

8. 1. 2020.

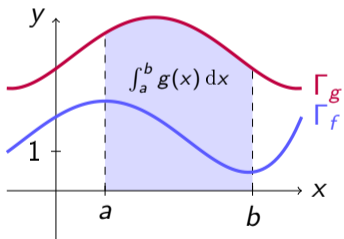
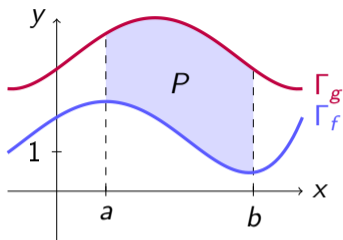


$$\int_a^b f(x) dx = -P_1 + P_2 - P_3 + P_4.$$

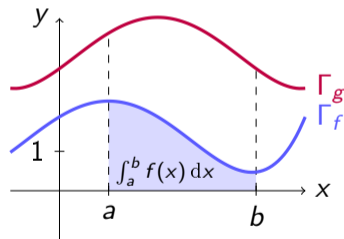
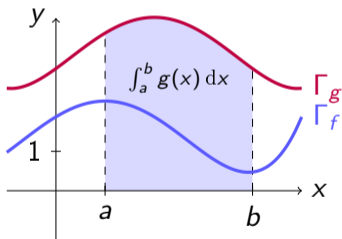
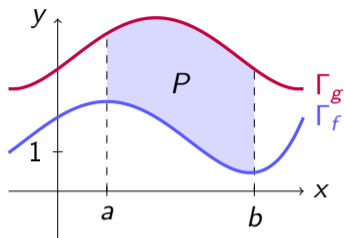
Primjer 1



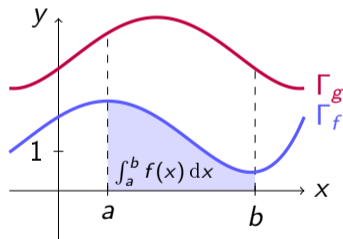
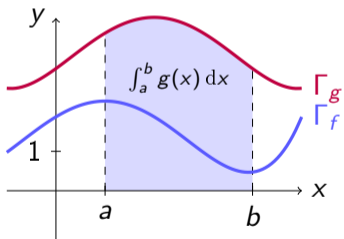
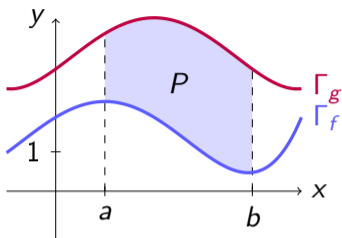
Primjer 1



Primjer 1

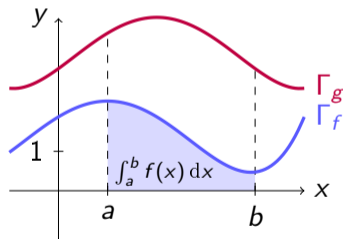
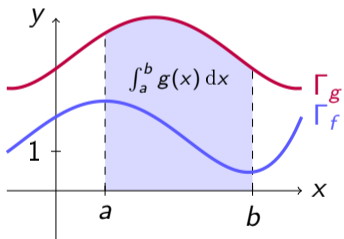
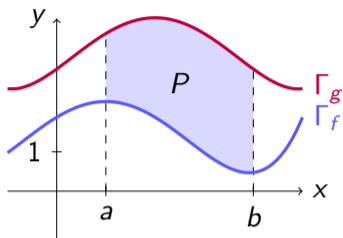


Primjer 1



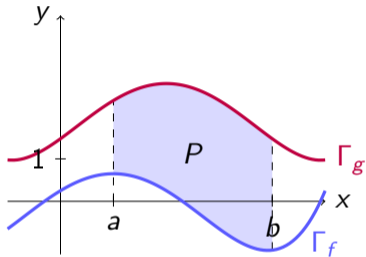
$$\Rightarrow P = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

Primjer 1

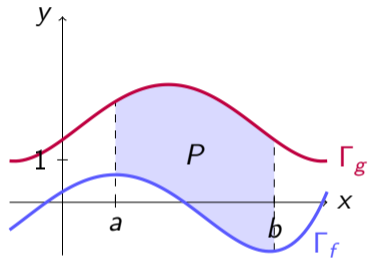


$$\Rightarrow P = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

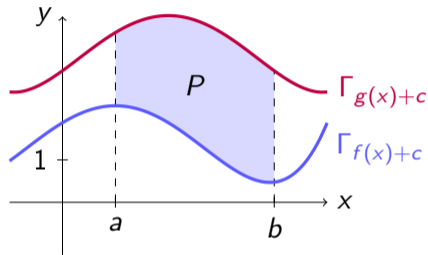
Primjer 2



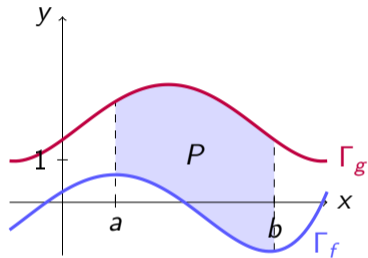
Primjer 2



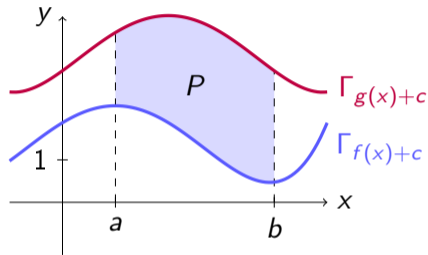
translacijom \updownarrow
za dovoljno velik $c > 0$
 \rightsquigarrow



Primjer 2

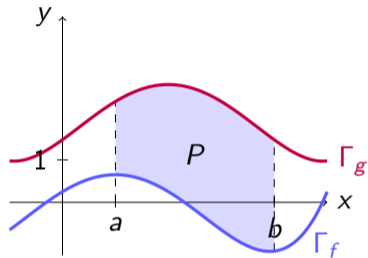


translacijom \updownarrow
za dovoljno velik $c > 0$
 \rightsquigarrow

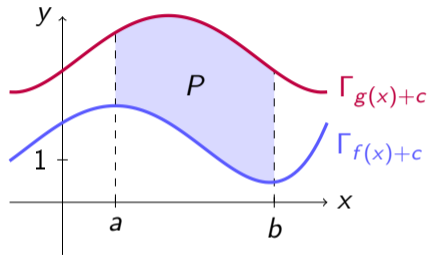


Primjer 1 $\Rightarrow P = \int_a^b ((g(x) + c) - (f(x) + c)) dx$

Primjer 2

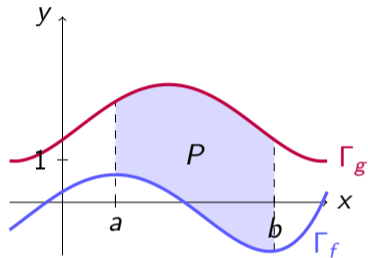


translacijom \updownarrow
za dovoljno velik $c > 0$
 \rightsquigarrow

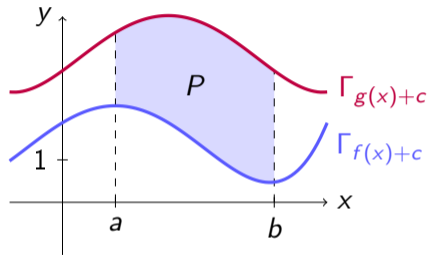


Primjer 1 $\Rightarrow P = \int_a^b ((g(x) \cancel{+c}) - (f(x) \cancel{+c})) dx$

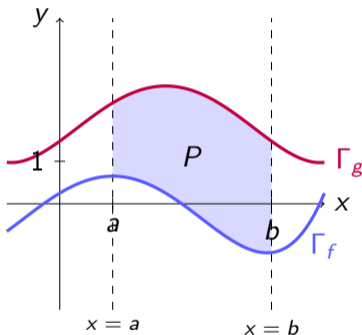
Primjer 2



translacijom \updownarrow
za dovoljno velik $c > 0$
 \rightsquigarrow



Primjer 1 $\Rightarrow P = \int_a^b ((g(x) \cancel{+c}) - (f(x) \cancel{+c})) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$



Neka su zadane neprekidne funkcije $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i segment $[a, b] \subseteq D$. Ako vrijedi

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, b],$$

tada je površina P dijela ravnine omeđenog sa Γ_f , Γ_g i pravcima $x = a$ i $x = b$ dana formulom

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

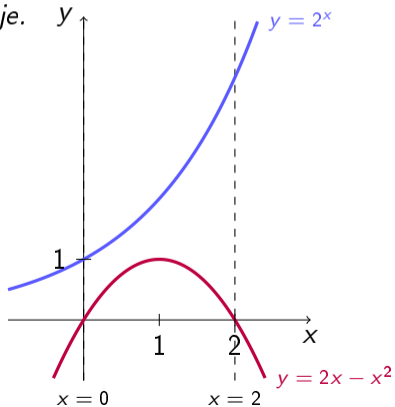
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



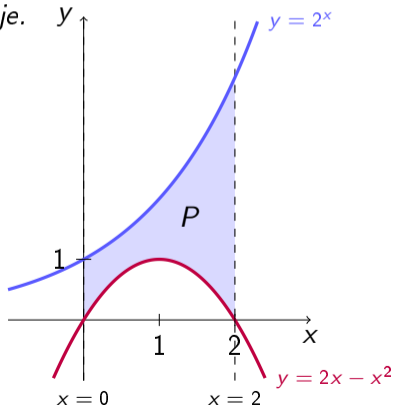
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



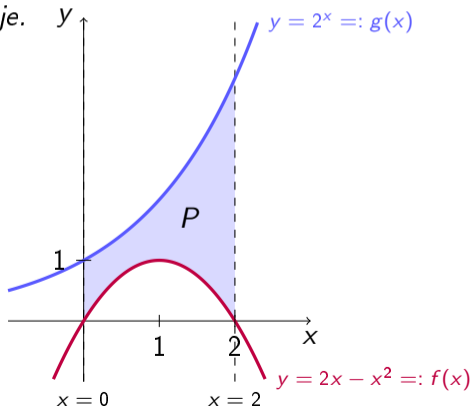
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



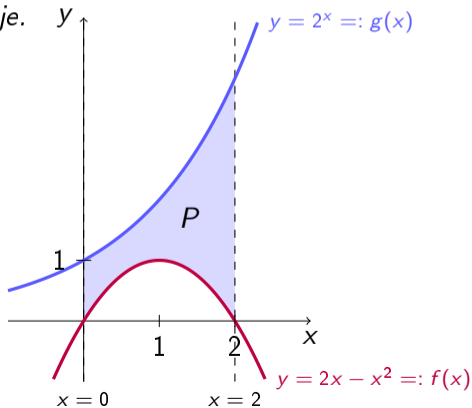
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



$$P = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$$

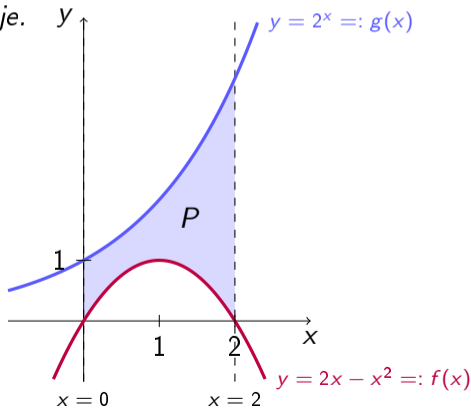
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) \, dx \\ &= \int_0^2 (2^x - (2x - x^2)) \, dx \end{aligned}$$

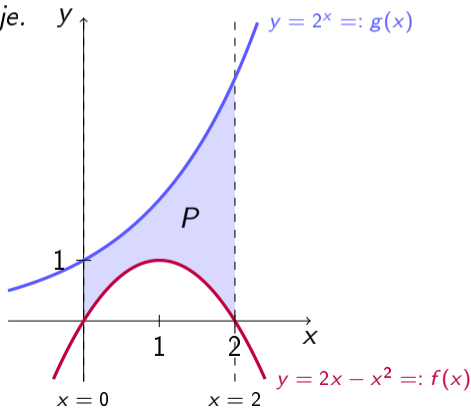
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) \, dx \\ &= \int_0^2 (2^x - (2x - x^2)) \, dx \\ &= \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \end{aligned}$$

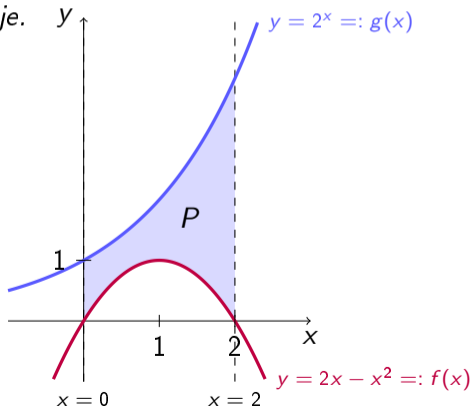
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) \, dx \\ &= \int_0^2 (2^x - (2x - x^2)) \, dx \\ &= \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{\ln 2} - 2^2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{2^0}{\ln 2} - 0^2 + \frac{0^3}{3} \right) \end{aligned}$$

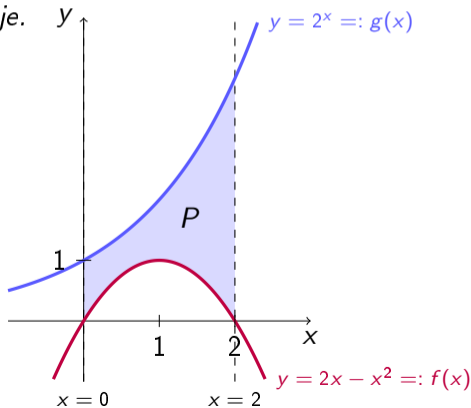
Zadatak 52(a)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) \, dx \\ &= \int_0^2 (2^x - (2x - x^2)) \, dx \\ &= \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{\ln 2} - 2^2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{2^0}{\ln 2} - 0^2 + \frac{0^3}{3} \right) \\ &= \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

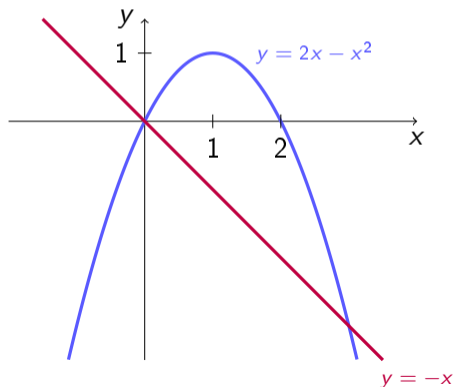
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



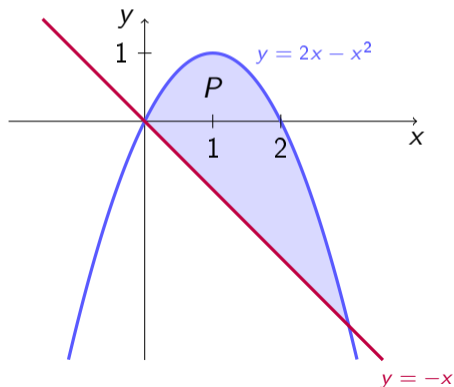
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



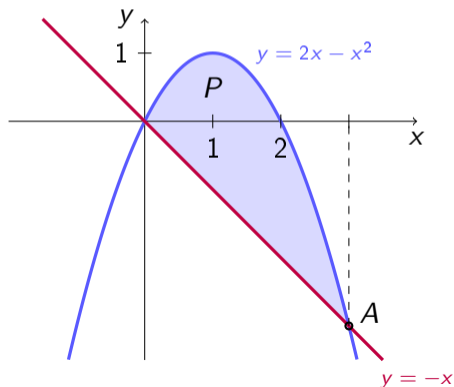
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



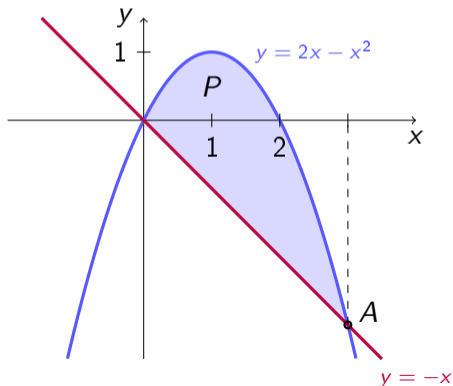
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

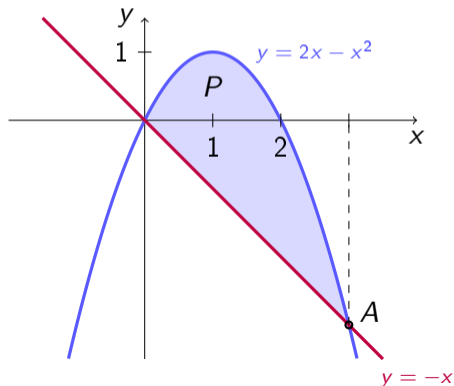
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = (0, 0) \text{ ili } A = (3, -3).$$

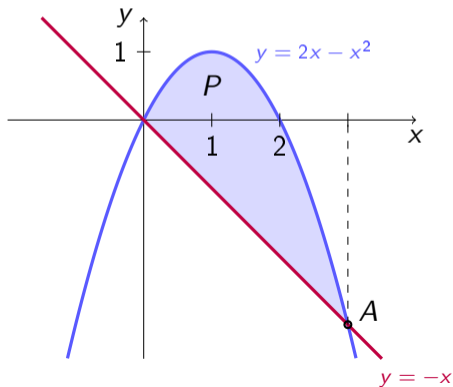
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (3, -3).$$

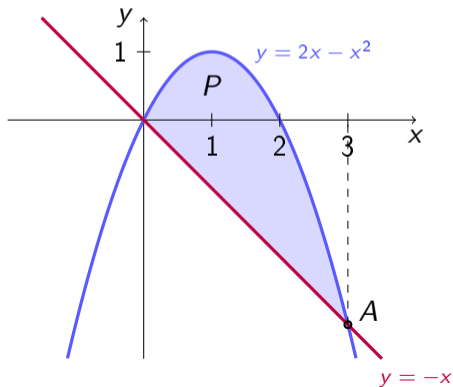
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (3, -3).$$

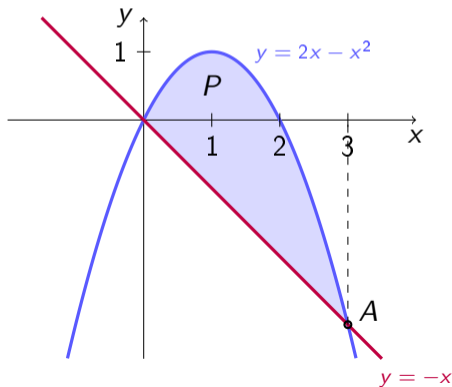
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (3, -3).$$

- Sa skice sad vidimo da je

$$P = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) dx$$

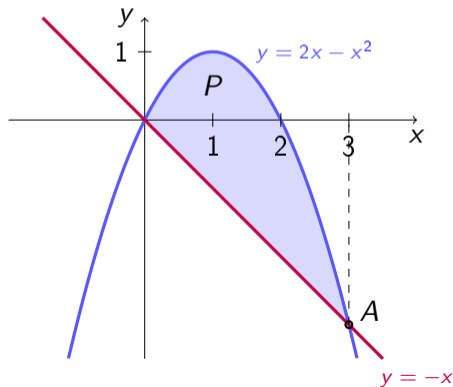
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (3, -3).$$

- Sa skice sad vidimo da je

$$\begin{aligned} P &= \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) \, dx \\ &= \int_0^3 (3x - x^2) \, dx \end{aligned}$$

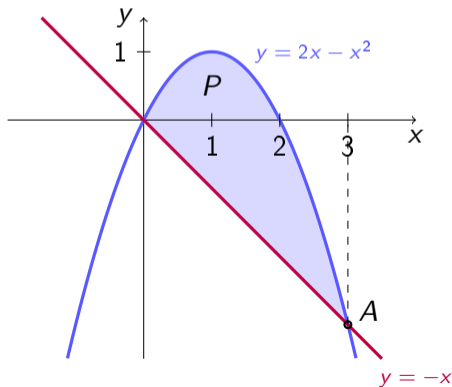
Zadatak 52(b)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{i} \quad y = -x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (3, -3).$$

- Sa skice sad vidimo da je

$$\begin{aligned} P &= \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) \, dx \\ &= \int_0^3 (3x - x^2) \, dx \stackrel{\text{sami}}{=} \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

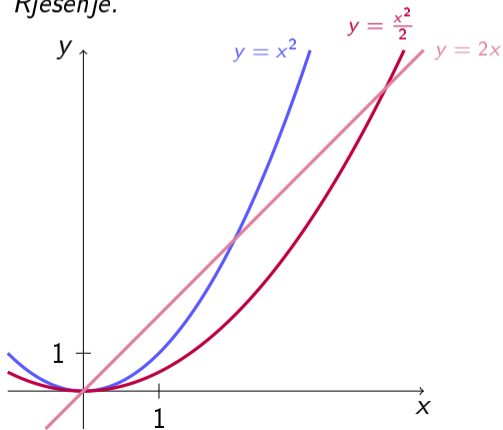
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



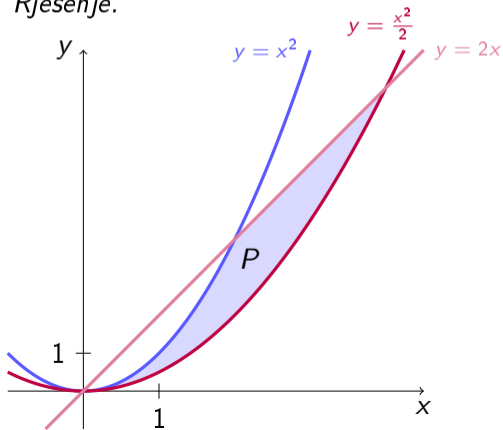
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



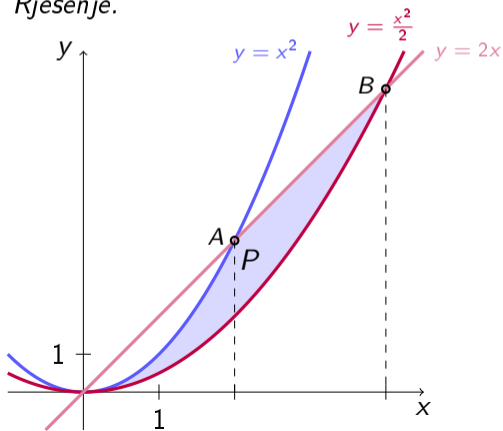
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



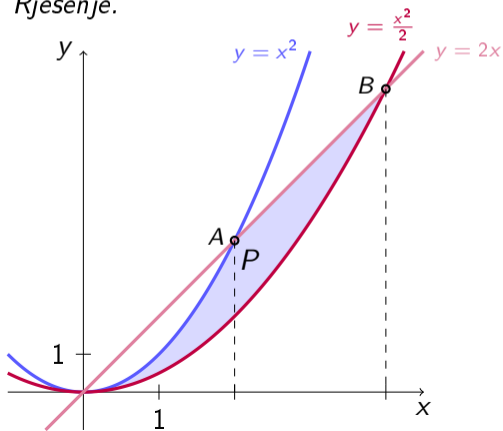
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

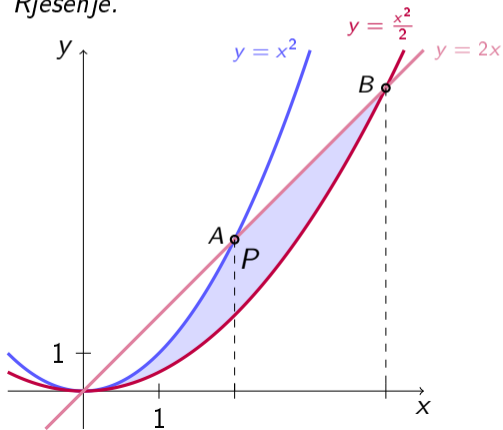
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0) \text{ ili } A = (2, 4).$$

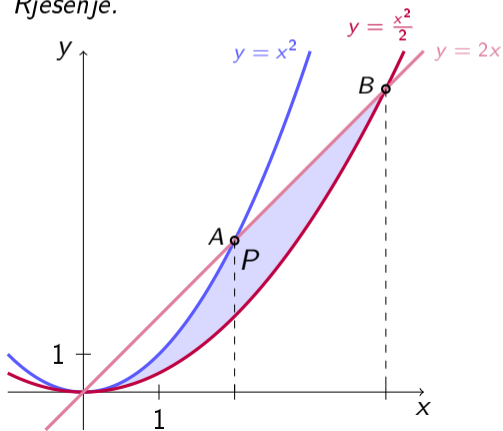
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = (0, 0) \text{ ili } A = (2, 4).$$

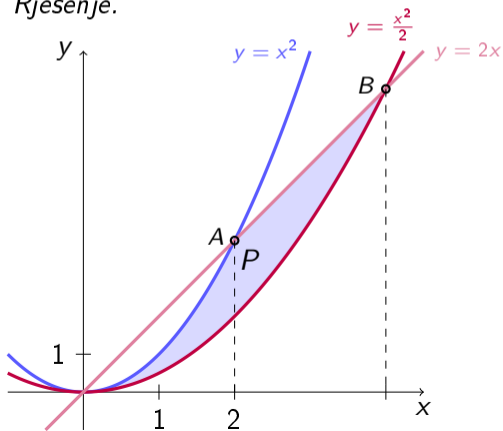
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0) \text{ ili } A = (2, 4).$$

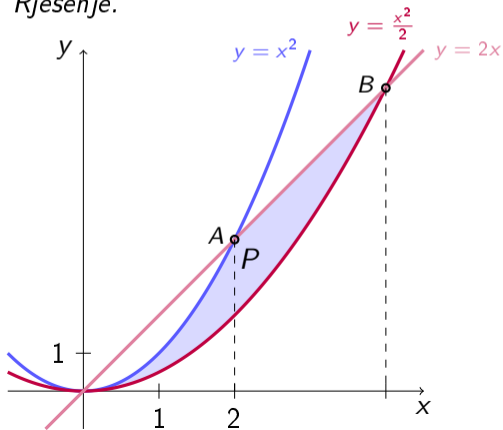
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (2, 4).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases}$$

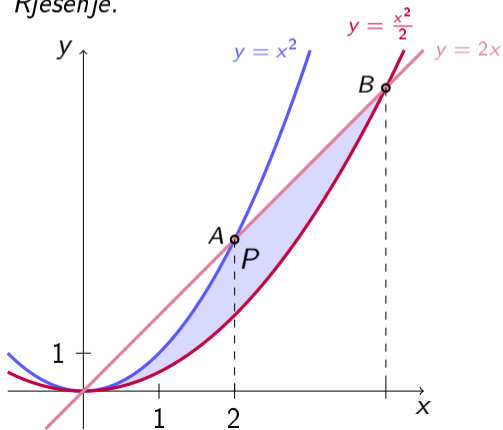
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (2, 4).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow B = (0, 0) \text{ ili } B = (4, 8).$$

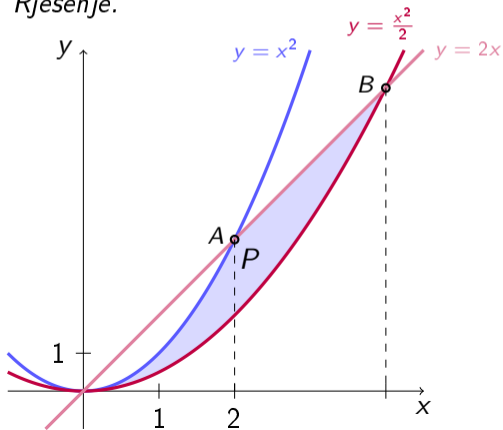
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (2, 4).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{B = (0, 0)} \text{ ili } B = (4, 8).$$

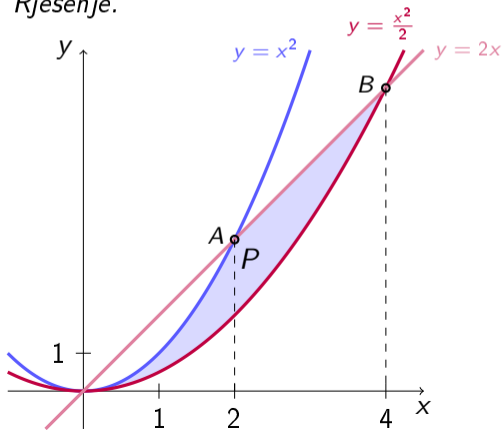
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (2, 4).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{B = (0, 0)} \text{ ili } B = (4, 8).$$

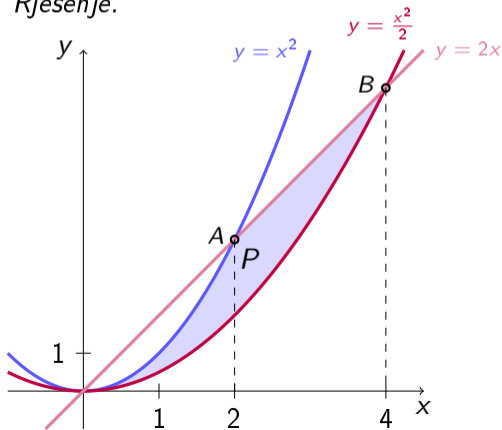
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (2, 4).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{B = (0, 0)} \text{ ili } B = (4, 8).$$
- Sa skice sad vidimo da je

$$P = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

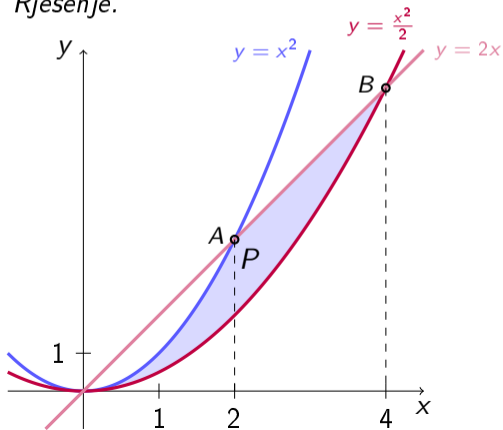
Zadatak 52(c)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad y = 2x,$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{A = (0, 0)} \text{ ili } A = (2, 4).$$

- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \cancel{B = (0, 0)} \text{ ili } B = (4, 8).$$

- Sa skice sad vidimo da je

$$P = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) dx \stackrel{\text{sami}}{=} 4.$$

Zadatak 52(d)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

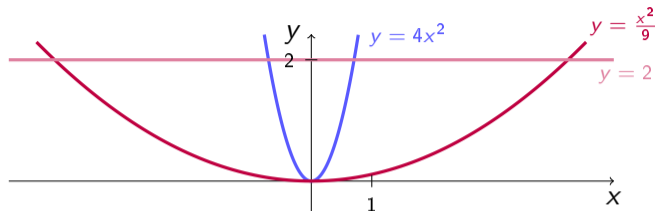
Zadatak 52(d)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



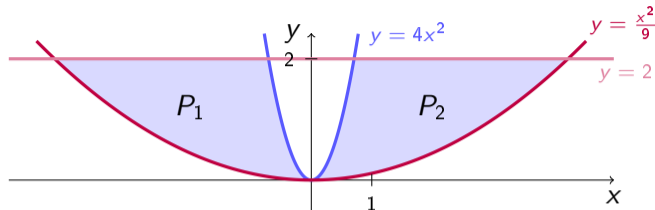
Zadatak 52(d)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



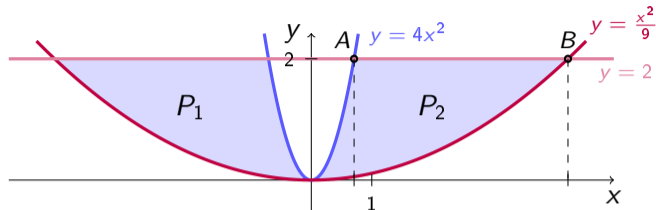
Zadatak 52(d)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



Zadatak 52(d)

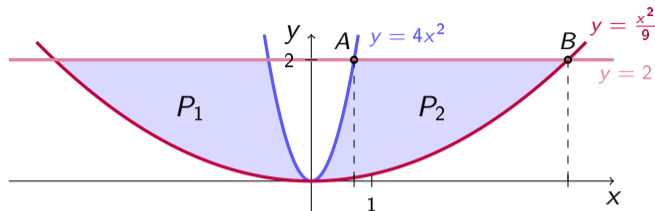
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases}$$



Zadatak 52(d)

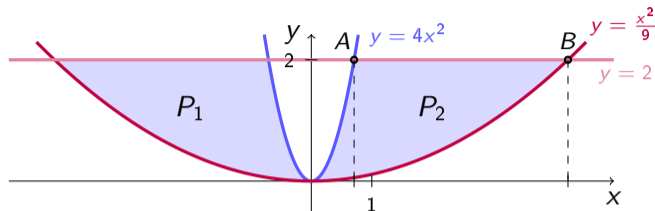
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

• A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right) \text{ ili } A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right).$$



Zadatak 52(d)

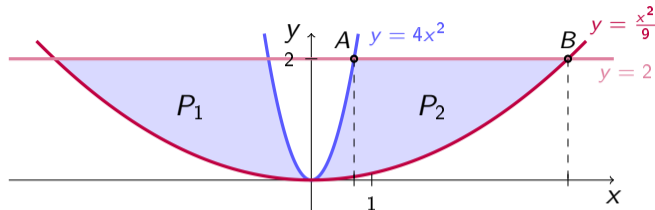
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

• A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$ ili $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$.



Zadatak 52(d)

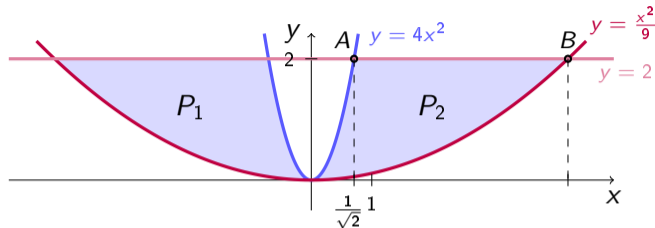
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

• A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$ ili $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$.



Zadatak 52(d)

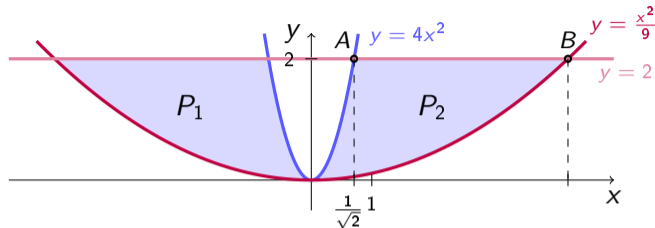
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right) \text{ ili } A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases}$$



Zadatak 52(d)

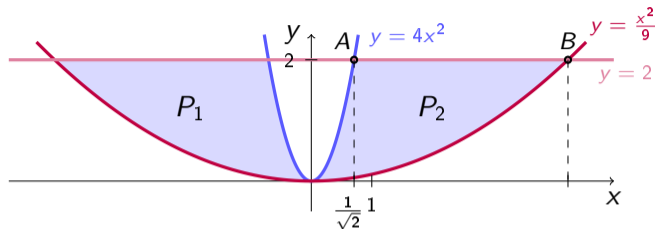
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right) \text{ ili } A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (-3\sqrt{2}, 2) \text{ ili } B = (3\sqrt{2}, 2).$$



Zadatak 52(d)

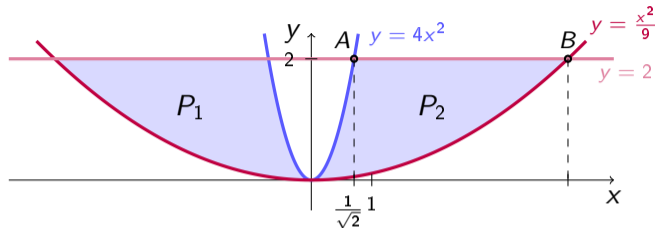
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right) \text{ ili } A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B = \left(3\sqrt{2}, 2 \right) \text{ ili } B = \left(3\sqrt{2}, 2 \right).$$



Zadatak 52(d)

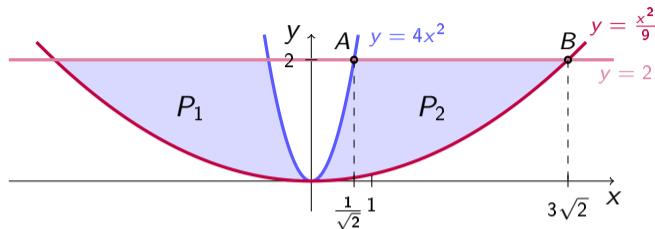
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right) \text{ ili } A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right).$$
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav
$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B = \left(3\sqrt{2}, 2 \right) \text{ ili } B = \left(3\sqrt{2}, 2 \right).$$



Zadatak 52(d)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

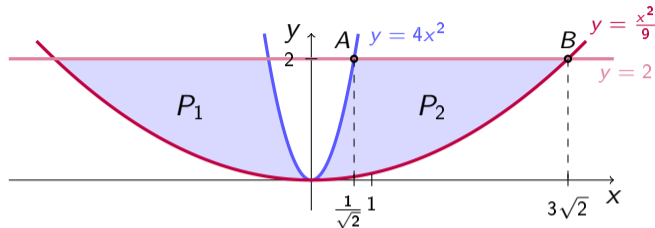
i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 4x^2 \\ 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 2 \end{cases}$ ili $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$.
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$ ili $B = (3\sqrt{2}, 2)$.

Kako je $P_1 = P_2$ (sve su zadane funkcije parne!), sa skice sad vidimo da je

$$P = P_1 + P_2 = 2P_2$$



Zadatak 52(d)

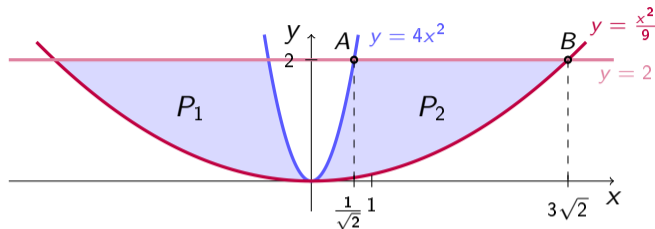
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$ ili $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$.
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (3\sqrt{2}, 2)$ ili $B = (3\sqrt{2}, 2)$.



Kako je $P_1 = P_2$ (sve su zadane funkcije parne!), sa skice sad vidimo da je

$$P = P_1 + P_2 = 2P_2 = 2 \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(4x^2 - \frac{x^2}{9} \right) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{3\sqrt{2}} \left(2 - \frac{x^2}{9} \right) dx \right)$$

Zadatak 52(d)

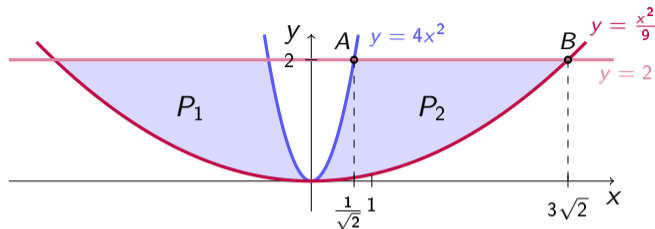
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljama

$$y = 2, \quad y = 4x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{x^2}{9},$$

i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- A je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$ ili $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right)$.
- B je točka (x, y) koja zadovoljava sustav $\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (3\sqrt{2}, 2)$ ili $B = (3\sqrt{2}, 2)$.



Kako je $P_1 = P_2$ (sve su zadane funkcije parne!), sa skice sad vidimo da je

$$P = P_1 + P_2 = 2P_2 = 2 \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(4x^2 - \frac{x^2}{9} \right) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{3\sqrt{2}} \left(2 - \frac{x^2}{9} \right) dx \right) \stackrel{\text{sami}}{=} \frac{20}{3} \sqrt{2}.$$

Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A \left(\frac{1}{4}, 2 \right)$ i $B \left(2, \frac{1}{4} \right)$. Izračunajte njegovu površinu.

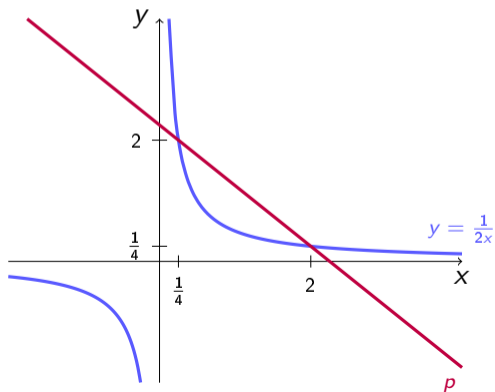
Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



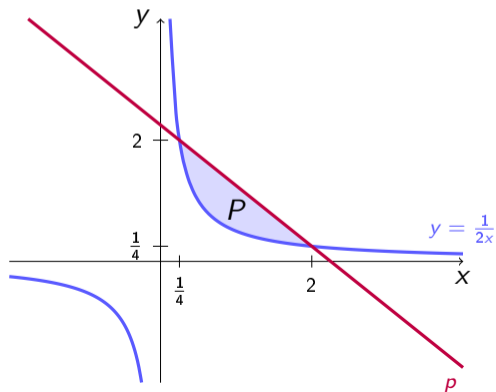
Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



Zadatak 52(e)

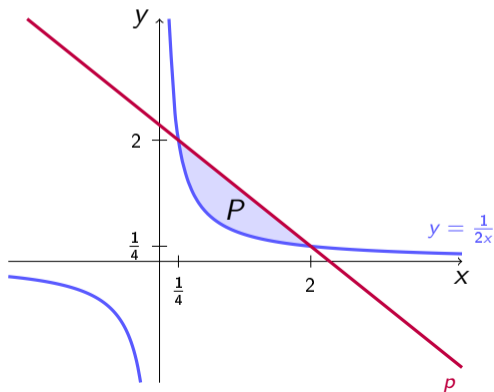
Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- $p \dots y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$



Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

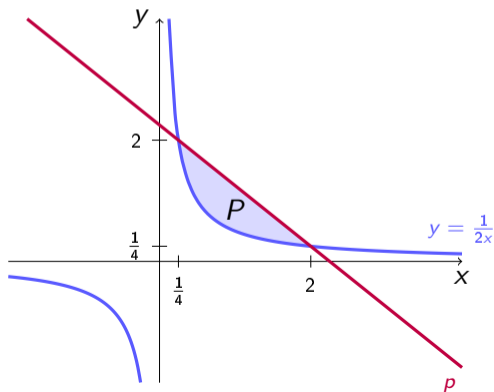
$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- $p \dots y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$

$$y - 2 = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2 - \frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{4} \right)$$



Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

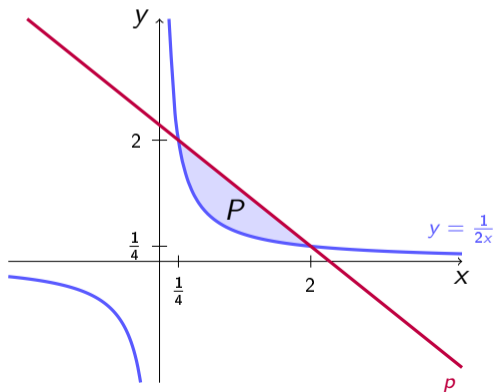
i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- $p \dots y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$

$$y - 2 = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2 - \frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{4} \right)$$

$$y = -x + \frac{9}{4}.$$



Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

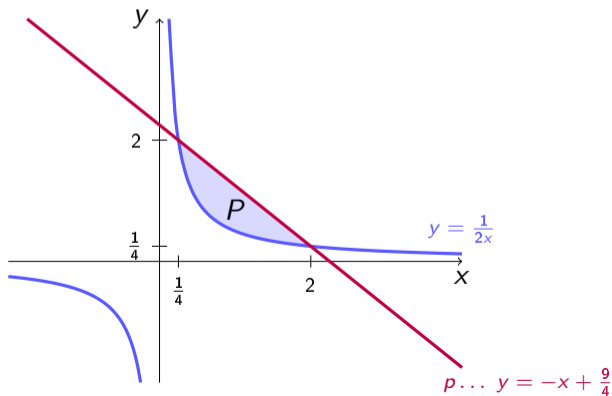
i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.

- $p \dots y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$

$$y - 2 = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2 - \frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{4} \right)$$

$$y = -x + \frac{9}{4}$$



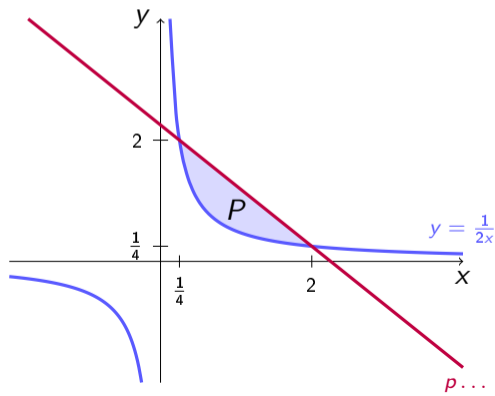
Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- $p \dots y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$

$$y - 2 = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2 - \frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{4} \right)$$

$$y = -x + \frac{9}{4}.$$

- Sa slike sad vidimo da je

$$P = \int_{\frac{1}{4}}^2 \left(\left(-x + \frac{9}{4} \right) - \frac{1}{2x} \right) dx$$

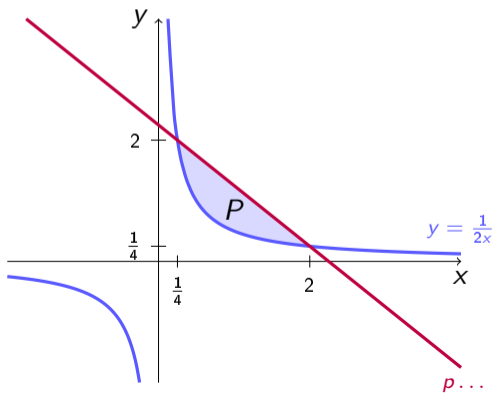
Zadatak 52(e)

Skicirajte dio ravnine omeđen krivuljom

$$2xy = 1 \quad \left(\Leftrightarrow y = \frac{1}{2x} \right)$$

i pravcem p koji je siječe u točkama $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ i $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Izračunajte njegovu površinu.

Rješenje.



- $p \dots y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$

$$y - 2 = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2 - \frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{4} \right)$$

$$y = -x + \frac{9}{4}.$$

- Sa slike sad vidimo da je

$$P = \int_{\frac{1}{4}}^2 \left(\left(-x + \frac{9}{4} \right) - \frac{1}{2x} \right) dx \stackrel{\text{sami}}{=} \frac{63}{32} - \frac{3}{2} \ln 2.$$